Formule générale

E(aX + beta) = a\*E(X) + beta

E(X+Y) = E(X)+E(Y)

Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2

Var(X) = Somme(((xi-E(X))^2)\*pi)

Ecart type

σ = sqrt(Var(X))

Var(aX) = a^2 \* Var(X)

Var(X+Y)=Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X,Y)

Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\*E(Y)

Cov(X,X) = Var(X)

Cov(X,Y) = Cov(Y,X)

Cov(X,a) = 0

Si X,Y indép -> Cov(X,Y)=0 => Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)

Coefficient de correlation

p(X,Y) = Cov(X,Y)/(σ(x)\*σ(y))

Loi binomiale

On effectue ici n=10 repetitions independantes dune meme experience de Bernouilli a 2 issues. Succes S… de probabilite p=0,4 et le succes S barre de probabilite 1-p. Ainsi le nombre de succes X suit la loi binomiale de paramatre n=10 et p=0,4

P(X=k) = (kCn)\* p^k \* (1-p)^(n-k)

distrib -> binomFdp(n,p,k)

P(X≥5) = 1−P(X≤4) = 1−(P(X= 0)+...+P(X= 4))

P(X<=k) : distrib -> binomFRep(n,p,k)

P(6<=X<=17) = binomFRep(n,p,17)- binomFRep(n,p,5)

E(X) =n×p

Var(X) =n×p×(1−p)

Lois de géométrique

Echec ou pas echec

On sarrete au premier succes

P(X=k) = ((1-p)^(k-1))\*p

E(Y) =1/p

Var(Y) = (1-p)/(p^2)

Loi de poisson

Une v.a. discrete X suit une loi de Poisson de parametre λ >0

P(X=k)=(e^(-λ)) \* (λ^k)/(k!)

E(X) =λ

sx^2=λ

Si X,Y sont deux variables independantes de lois respectives P(λ) et P(μ), alors Z=X+Y est une variable de loi P(λ+μ)

Si n est suffisamment grand, la loi de Poisson P(np) est une bonne approximation de la loi binomiale B(n,p) pour n>=20 et p<=0,05

V.A. absolument continues:

densité de proba :

integrale(f(x)) = 1

f(x) positive et continue sur R

Fonction de repartition :

integrale(-inf,x)(f(t))

E(X) = integrale(x\*f(x))

Var(X) = integrale(x^2 \* f(x)) - E(X)^2

Loi uniforme

densite de proba : f(x) = 1/(b-a)

E(X) = (a+b)/2

Var(X) = ((b-a)^2)/12

Fonction de rep :

0 si x <= a

(x-a)/(b-a) si a<x<=b

1 si x>b

Loi exponentielle

f(x) = λ\*e^(-λ\*x)

E(x)=1/λ

Var(x)=1/(λ)^2

Fct de rep :

0 si x<0

1-e^-(λ\*x) si x>=0

Loi Normale :

N(m,σ)

m : moyenne

σ: ecart type, sqrt(var(x))

densite de proba:

f(x) = 1/(σ\*sqrt(2\*pi))\*exp(-((x-m)^2)/(2\*σ^2))

Loi normale centree reduite :

X : N(m,σ)

Y = (X-m)/σ

L(Y) = N(0,1)

fy(x) = (1/sqrt(2\*pi))\*exp(-(x^2)/2)

fonction de repartition : phi(x)

P(Y<=x) = phi(x)

P(Y<=-x) = phi(-x) = 1-phi(x)

P(Y>x) = 1-phi(x)

P(a<Y<b)= phi(b)-phi(a)

A la calculatrice :

distrib -> normalFRep(19.5,22,20,0.5) = loi normal

distrib -> normalFRep(-1E99,3,0,1) = phi(3) = LNCR

Theoreme limite :

Inegalite de Markov :

Si X v.a. et a un reel > 0

Alors P(X >= a) <= (1/a)\*E(X)

TCL :

Soit n V.A. X1,X2,...,Xn toutes independantes et de meme loi, desperence m et de variance sigma^2.

Soit la variable definie comme la moyenne Xn barre = (1/n)\*somme(Xi)

Quand n tend vers l’infini, la somme des V.A. est une LNCR : N(0,1)

Approximation:

loi binomiale par une loi N(n\*p,sqrt(n\*p\*(1-p)) quand np>15

loi binomiale par une loi N(n\*p,sqrt(n\*p\*(1-p)) quand n>30 et np(1-p)>3

Approximation:

loi de Poisson par une loi N(,sqrt()) >16

---------------------------

Formules Somme :

Entier consécutifs n(n+1)/2

Suite arithmétique (n+1) \*(u0+un)/2

Puissance successives 1-q^(n+1)/1-q

Suite geometrique u0\*(1-q^(n+1)/1-q)

Integration par partie :

int(f’ \* g) = [f\*g] - int(f \* g’)

Programme\_bis\_exo :

Lois binomiale

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de param`etres 3 et 0,5. Une variable aléatoire Y, indépendante de X, suit la loi binomiale de param`etres 2 et 0,4. Calculer P(X+Y= 2).

P(X+Y= 2) =P((X= 0∩Y= 2)∪(X= 1∩Y= 1)∪(X= 2∩Y= 0)), 3 événements incompatibles = P(X= 0∩Y= 2) +P(X= 1∩Y= 1) +P(X= 2∩Y= 0))=P(X= 0).P(Y= 2) +P(X= 1).P(Y= 1) +P(X= 2).P(Y= 0))

car les v.a. X et Y sont indépendantes= 0.125×0.16 + 0.375×0.48 + 0.375×0.36 = 0.335

Autre

Par exemple,P((X= 1)∩(Y= 2)) =P(ω1) = 0,1, alors queP(X= 1)×P(Y= 2) =0,5×0,1 = 0,05.On a donc:P((X= 1)∩(Y= 2))6=P(X= 1)×P(Y= 2), donc les v.a.r. X et Y nesont pas ind ́ependantes

La fonction de r ́epartitionFde la variable al ́eatoireSest d ́efinie pour tout r ́eeltparF(t) =P(S≤t)

Exo bino

**Une variable al ́eatoire X suit la loi binomiale de param`etres 3 et 0,5. Une variableal ́eatoire Y, ind ́ependante de X, suit la loi binomiale de param`etres 2 et 0,4. CalculerP(X+Y= 2).P(X+Y= 2) =P((X= 0∩Y= 2)∪(X= 1∩Y= 1)∪(X= 2∩Y= 0)), 3 ́ev ́enementsincompatibles=P(X= 0∩Y= 2) +P(X= 1∩Y= 1) +P(X= 2∩Y= 0))=P(X= 0).P(Y= 2) +P(X= 1).P(Y= 1) +P(X= 2).P(Y= 0)) car les v.a.XetYsont ind ́ependantes= 0.125×0.16 + 0.375×0.48 + 0.375×0.36 = 0.335**

Hypergeometrique

La probabilit ́e de casser une bouteille de Bordeaux vaut 200/1000 = 0.2, notons lap.Si on consid ́ere l’exp ́erience al ́eatoire ”Robert tr ́ebuche sur une bouteille et la casse”,soit c’est une bouteille de Bordeaux (avec probabilit ́ep), soit c’est un Cˆote de Toul(avec probabilit ́e 1−p). On recommence cette exp ́eriencen= 12 fois, de fa ̧con nonind ́ependante (on ne peut en effet pas casser deux fois la mˆeme bouteille !). Si on noteXla variable du nombre de bouteilles de Bordeaux cass ́ees, elle suit une loi hyperg ́eom ́etriquede param`etresN= 1000,n= 12 etp= 0.2

exo1

Une variable al ́eatoire X suit la loi binomiale de param`etres 3 et 0,5. Une variableal ́eatoire Y, ind ́ependante de X, suit la loi binomiale de param`etres 2 et 0,4.

CalculerP(X+Y= 2).

P(X+Y= 2) =P((X= 0∩Y= 2)∪(X= 1∩Y= 1)∪(X= 2∩Y= 0)), 3 ́ev ́enementsincompatibles

=P(X= 0∩Y= 2) +P(X= 1∩Y= 1) +P(X= 2∩Y= 0))

=P(X= 0).P(Y= 2) +P(X= 1).P(Y= 1) +P(X= 2).P(Y= 0)) car les v.a.XetYsont ind ́ependantes

= 0.125×0.16 + 0.375×0.48 + 0.375×0.36 = 0.3357.2

Mˆeme question que pr ́ec ́edemment, si X suit la loi binomiale de param`etres 3 et0,5 et Y suit la loi binomiale de param`etres 2 et 0,5, les deux variables ́etant toujoursind ́ependantes.

Dans ce cas, puisqueXetYsont ind ́ependantes, et le param`etrepest le mˆeme, alorsX+Ysuit une loi binomiale de param`etres 5 = 3 + 2 et 0.5.

Alors:P(X+Y= 2) =C25(0.5)2(0.5)3= 10.(0.5)5= 0.3125

Consid ́erons l’exp ́erience al ́eatoire ”on extrait une pi`ece de la production de l’usine”. Alors soit ellea un d ́efaut, ce qui se produit avec probabilit ́ep= 0.03, soit elle n’a pas de d ́efaut. On r ́ep`ete cetteexp ́eriencen= 1000 fois en pr ́elevant un ́ecchantillon (i.i.d.) de 1000 pi`eces, donc l’ind ́ependanceest suppos ́ee.

Notons alorsXla variable du nombre de pi`eces d ́efectueuses parmi les 1000 pi`ecestir ́ees.

Elle suit une loi binomiale de param`etres 1000 et 0.03.On pourrait bien sˆur faire les calculs de probabilit ́es avec cette loi binomiale (si on dispose d’unlogiciel, on obtient P(X≥50) = 0.0004207665 etP(20≤X≤40) = 0.9493673), parfois cela esttrop lourd et on pr ́ef`ere effectuer une approximation.

Puisque Est grand, et petit, le TCL s’applique ici et on peut en d ́eduire l’approximation d'une loi binomiale (1000,0.03) par une loi normale de param`etres n\*p= 30 et√n.p.(1−p) = 5.3944.Ainsi la variableY=X−305.3944suit une loi normale centr ́ee r ́eduite.

Alors :P(X≥50)'P(Y≥50−305.3944) =P(Y≥3.71) = 1−Φ(3.71) = 0.000108P(20≤X≤40)'P(−1.85≤Y≤1.85) = 2Φ(1.85)−1 = 2×0.9678−1 = 0.9356